BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2024. NOVEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. **(2 pont)** Panninak 10 különböző méretű kockája van, az élek hossza rendre 1 *cm*, 2 *cm*, 3 cm, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm*, 8 *cm*, 9 *cm* és 10 *cm*. Ezek mindegyikének felhasználásával Panni két egyforma magas tornyot szeretne építeni. Hogyan segítenétek neki? A két tornyot úgy építjük meg, hogy minden kocka felső és alsó lapja is legfeljebb egy másik kockával érintkezik.

Megoldás: Nem lehetséges (*1 pont*). Ugyanis külön-külön (1 + 2 + 3 + 4 + … + 10):2 = 55:2 kellene legyen a magassága a tornyoknak, de 55 nem páros, így nem osztható 2-vel (*1 pont*).

2. **(5 pont)** Ha egyszerre igaz, hogy

$$\text{alma} \times \text{körte} \times \text{körte} = 36 \text{ és}$$

$$\text{alma} \times \text{körte} \times \text{barack} = 72,$$

akkor mennyi lehet a barack értéke? Keressétek meg az összes megoldást! Az × szorzást jelent.

Megoldás: Mivel 36 = 1 × 6 × 6 = 4 × 3 × 3 = 9 × 2 × 2 = 36 × 1 × 1 (*2 pont*)
ezért ebből a következő lehetőségeket kapjuk:
alma = 1, körte = 6 vagy alma = 4, körte = 3 vagy
alma = 9, körte = 2 vagy alma = 36, körte = 1 (*2 pont*).
Mindezek segítségével a második egyenlőségből következik, hogy a barack lehetséges értékei rendre 12, 6, 4 vagy 2 (*1 pont*).

3. **(16 pont)** Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat írjátok fel olyan sorrendben, hogy a közvetlen egymás után írt számok közti különbség vagy 2 legyen, vagy egyik kétszerese legyen a másiknak! Írjátok fel az összes különböző lehetőséget! Két felírást különbözőnek tekintünk, ha van olyan szám, amelyik nem ugyanannyiadik helyen van a sorban.

Megoldás: A következő öt lehetőség van.
9, 7, 5, 3, 1, 2, 4, 6, 8, 10;
9, 7, 5, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3;
9, 7, 5, 10, 8, 4, 2, 1, 3, 6;
9, 7, 5, 10, 8, 4, 6, 3, 1, 2;
9, 7, 5, 10, 8, 6, 3, 1, 2, 4,
vagy az alábbiak, ami fordított sorrendje az előzőeknek.
10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9;
3, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 5, 7, 9;
6, 3, 1, 2, 4, 8, 10, 5, 7, 9;
2, 1, 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7, 9;
4, 2, 1, 3, 6, 8, 10, 5, 7, 9
Minden megoldáspár (egy sorrend és fordítottja) *3 pontot* ér, amiből, ha csak az egyiket írják fel, akkor arra *2 pont* jár.

4. **Villámkérdés (3 pont)** Anna és Bori versenyt úsznak. Hányféle sorrendben úszhatnak be a célba? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás: Ha a válasz, hogy kétféleképpen: AB, BA (*1 pont*).
Ha a válasz, hogy előfordulhat holtverseny is, tehát AB, BA, A-B, vagyis háromféleképpen, akkor (*3 pont*).
Ha csak a helyes háromféleképpen választ adják, de nem indokolják, hogy mely eseteket jelentik, akkor csak (*2 pont*)-ot kaphatnak.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2024. NOVEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. **(2 pont)** Egy Siófokról induló vitorlás hajó, melynek saját tömege 5 tonna, 30 utassal - akik együtt 2 500 *kg*-ot tettek ki - és 500 *kg* egyéb rakománnyal, melyből 100 *kg* volt az élelmiszer, elvitorlázott Keszthelyre. Hány tonna lett a hajó teljes tömege miután az utasok az út felénél elfogyasztottak 50 *kg* élelmet? (Egyéb, a hajó teljes tömegét érintő esemény nem történt az úton.)

Megoldás: Induláskor a hajó teljes tömege 5 *t* + 2500 *kg* + 500 *kg* = 5 *t* + 3 *t* = 8 *t* volt (*1 pont*). Miután az utasok elfogyasztottak 50 *kg* élelmet, az élelem az utasokba került, ami ezáltal továbbra is a hajón maradt, vagyis nem változott a hajó teljes tömege. Így a hajó teljes tömege ezt követően is 8 tonna volt (*1 pont*).

2. **(5 pont)** 12 golyó esetén, amelyek közül 11 egyforma, 1 pedig más súlyú (nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb), meg lehet-e állapítani kizárólag kétkarú mérleg segítségével 2 méréssel, hogy az eltérő súlyú nehezebb vagy könnyebb? Ha igen, hogyan, ha nem, miért?

Megoldás: Igen, meg lehet (*1 pont*). Például felteszünk előbb 4-4-et (*1 pont*). Ha egyformák, akkor a lent hagyott 4 között van az eltérő. Azt kicseréljük az egyik karban lévő néggyel és abból, hogy melyik irányba billen kiderül, hogy köztük az eltérő könnyebb vagy nehezebb (*1 pont*). Ha a kezdetben feltett 4-4 nem egyforma, akkor amelyik négyet a lent hagyott egyforma 4-re cseréljük, megjegyezzük, hogy az lehúzta vagy sem a másik négyet (*1 pont*). Ha másodikra egyformát mutat a mérleg, akkor a levett 4 között van a más és ha az korábban lehúzta a kart, akkor nehezebb ellenkező esetben könnyebb a többinél. Ha a második mérésnél nem lett egyforma, akkor amit első mérés után fenn hagytunk, abban van a más és az szerint, hogy az a kar felemelkedik vagy lehúzza, az eltérő súlyú könnyebb vagy nehezebb (*1 pont*). (Az is jó megoldást ad, ha 3-3 darabbal kezdünk.)

3. **(16 pont)** A négy alapművelet +, -, ·, :, a zárójelek, valamint pontosan öt darab 5-ös segítségével írjátok fel a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat! Mindegyik esetben elegendő egyetlen megoldást adjatok.

Megoldás: Egy-egy példát láthatunk mindegyik szám helyes felírására:

$3=(5\cdot5-5-5):5$; $\quad 4=5-5:5+5-5$

$5=5+(5-5)\cdot(5+5)$; $\quad 6=5+5:5-5$

$7=5+5:5+5:5$; $\quad 8=5+(5+5+5):5$;

$9=(5\cdot5-5):5+5$; $\quad 10=5+5+(5-5)\cdot5$

Helyesen felírt számonként *2-2 pont* jár.

4. **Villámkérdés (3 pont)** Anna, Bori és Cili versenyt úsznak. Hányféle sorrendben úszhatnak be a célba? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás: Ha a válasz, hogy hatféleképpen: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA (*1 pont*).
Ha a válasz, hogy az előzőek és előfordulhatnak holtversenyek, de csak a kettős holtversenyekre gondolnak: A-B C, A-C B, B-C A, A B-C, B A-C, C A-B vagyis tizenkétféleképpen, akkor (*2 pont*).
Ha a válasz, hogy tizenháromféleképpen, vagyis az előzőek és még a hármasholtverseny is (*3 pont*).
Amennyiben külön csak egyik esettel számolnak, az csak *1 pontot* ér.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2024. NOVEMBER 2.)

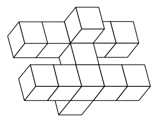
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. **(2 pont)** Az 1-től 102-ig lévő egész számokat írjátok fel olyan sorrendben, hogy az egymás után írt számok közt a különbség vagy 2 legyen, vagy egyik kétszerese legyen a másiknak! Adjatok két különböző felírást. A fordított sorrendben felírtat nem tekintjük különbözőnek.

Megoldás: Például: 99, 97, …, 3, 1, 2, 4, 6, …98, 100, 102 (*1 pont*)
és 101, 99, 97,… 51, 102, 100, 98, …, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9,…47, 49 (*1 pont*).

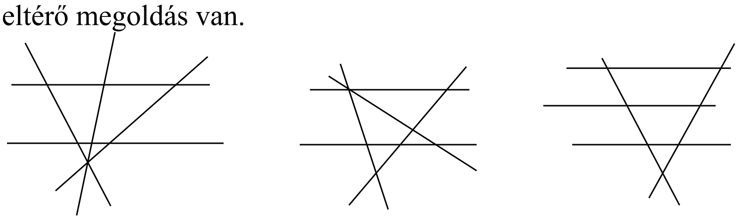
2. **(5 pont)** Tizenhárom szabályos dobókockából összeragasztottuk a képen látható testet. Hány pötty lehet maximálisan a felületén?



Megoldás: 6 db olyan kocka van, amelyiknek 5 lapját láthatjuk a létrejött test körbeforgatásával, 5 db olyan, aminek 4 lapját láthatjuk, és 2 db olyan, aminek 2 lapját láthatjuk.
Tudjuk, hogy egy kockán összesen 21 pötty van (*1 pont*).
Mivel 6 olyan kocka van, amelynek öt oldalát látjuk, ezért ezeknek a legjobb esetben azt az oldalát nem látjuk, ahol 1 pötty van. Így ezeken 20 pötty van
(*1 pont*).
5 olyan kocka van, amelynek 4 lapját látjuk, de itt mindegy, hogy melyiket, mert az egymással szemben lévő lapok összege mindig 7. Így ezeken 14 pötty van (*1 pont*).
2 olyan kocka van, amelynek 2 lapját látjuk. Ezeken a legjobb esetben az 5 és a 6 pöttyös lap lehet látható. Így ezeken 11 pötty van (*1 pont*).
Tehát $6\cdot 20+5\cdot 14+2\cdot 11=120+70+22=212$ pötty lehet maximálisan a test felületén (*1 pont*).

3. **(16 pont)** Rajzoljatok le 5 egyenest úgy, hogy összesen 7 metszéspontjuk legyen! Keressetek minél több különböző megoldást! Két megoldást akkor nem tekintünk különbözőnek, ha a két ábrán szereplő egyenesek párba állíthatóak úgy, hogy a párba állított egyeneseken fekvő metszéspontok száma megegyezik.

Megoldás: Az alábbi 3 eltérő megoldás van.



1 jó ábra *(5 pont)*; 2 jó ábra *(10 pont)*; 3 jó ábra (*16 pont*)

4. **Villámkérdés (3 pont)** Állapítsátok meg a $**\times*=*+1$ igaz egyenlőségben lévő $*$-ok helyén lévő számjegyeket! (nem feltétlenül kell a csillagoknak ugyanazt a számot jelölniük.)

Megoldás: Az eredményben 1-hez egyjegyűt adunk, így az csak egyjegyű vagy 10 lehet (*1 pont*). A bal oldalon kétjegyűt szorzunk egyjegyűvel, ami, ha egyjegyű, akkor 0, ha pedig kétjegyű, akkor legalább 10 (*1 pont*). Mivel a jobboldalon legalább 1 van, így csak a 10 jöhet szóba, vagyis ott 9 + 1 kell szerepeljen, így a baloldalon $10\cdot 1$-nek kell lennie, vagyis $10\cdot 1=9+1$ (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2024. NOVEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. **(2 pont)** A patikus egy kétkarú mérlegen kimért 100 *g*, majd 101 *g* és végül 102 *g* gyógyszert úgy, hogy az egyik tányérba a gyógyszert, a másikba pedig a súlyokat helyezte. Megtehette-e ezt, ha csak három, egyenként 90 *g*-nál kisebb súllyal rendelkezett? Ha nem, miért nem, ha igen, hogyan?

Megoldás: Igen, megtehette (*1 pont*). Például, ha a három súly rendre 49,5 *g*, 50,5 *g* és 51,5 *g* volt (*1 pont*).

2. **(5 pont)** Mondjátok el, milyen szabály szerint tölthették ki az alábbi táblázatokat? Ugyanezen szabály szerint töltsétek ki az utolsó táblázatot!

3	11	15
18	24	32
22	21	9

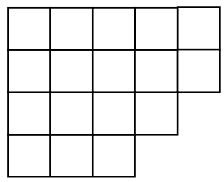
8	16	20
15	21	29
26	25	13

13	21	25
12	18	26
30	29	17

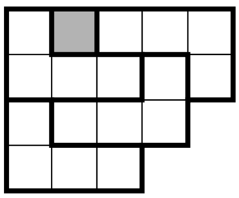
Megoldás: Az első sor táblázatonként megfelelő számait rendre növelték 5-tel (*1 pont*), a második sorban lévőket rendre csökkentették 3-mal (*1 pont*), és a harmadik sorban lévőket rendre növelték 4-gyel (*1 pont*). A következő helyesen kitöltött táblázatra *2 pont* jár.

18	26	30
9	15	23
34	33	21

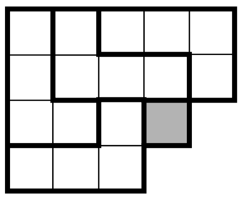
3. **(16 pont)** Hagyjatok el az alakzatból egyetlen négyzetet és a megmaradt alakzatot daraboljátok fel a rácsvonalak mentén négy azonos alakú és nagyságú részre. Adjatok négy eltérő megoldást úgy, hogy más-más négyzet elhagyásával adjátok ennek feldarabolását! (Két rész azonos, ha forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetőek.)



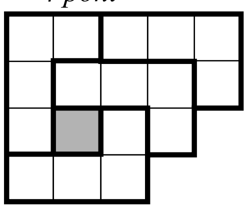
Megoldás:



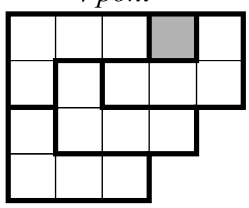
4 pont



4 pont



4 pont



4 pont

4. **Villámkérdés (3 pont)** 10 játékos vesz részt egy sakkbajnokságban, mindenki mindenkivel 1 partit játszik. Igaz-e, hogy bármelyik pillanatban találunk közülük 2 játékost, akik ugyanannyi partit játszottak addig?

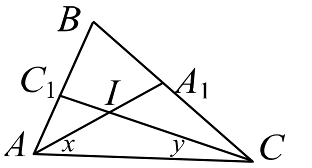
Megoldás: Igaz (*1 pont*). Ugyanis bárki által lejátszott mérkőzések száma 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 valamelyike lehet. Ám egyszerre a 0 és 9 nem fordulhat elő, mert ha valaki mindenkivel játszott (9 parti), akkor olyan nem lehet, aki még nem játszott senkivel (0 parti), vagy fordítva (*1 pont*). Tehát, ha megkérdezzük mindenkitől bármely pillanatban, hogy hány mérkőzést játszott eddig, akkor legfeljebb 9-féle választ kaphatunk. 10 ember esetén ez csak úgy fordulhat elő, ha legalább ketten ugyanazt a választ adták (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2024. NOVEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. **(2 pont)** Egy háromszögnek két belső szögfelezője egymással $60°$-os szöget zár be. Mutassátok meg, hogy ennek a háromszögnek van $60°$-os szöge!



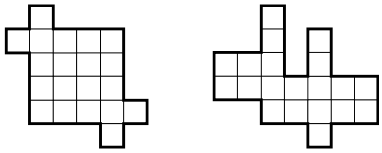
Megoldás: Legyen $AIC_1\sphericalangle = 60°$, ezért $x + y = 60°$. (*1 pont*).

Így $2x+2y=120°$, ahonnan $ABC\sphericalangle = 180° - (2x+2y) = 180° - 120° = 60°$ (1 pont).

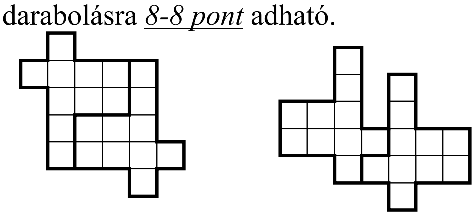
2. **(5 pont)** Andi választott négy különböző pozitív egész számot, és ezt Bandi is tudja. Andi ezután elárulta Bandinak, hogy mennyi a két kisebb szám összege, amiből Bandi nem tudta kitalálni a két számot. Amikor azonban Andi megmondta, hogy a négy szám összege 15, azután Bandi már felsorolta mind a négy számot. Melyek lehettek Andi számai?

Megoldás: Andi négy száma: 2, 3, 4, 6 (*1 pont*).
Andi elsőként 4-nél nagyobb összeget mondott, hiszen, ha az összeg 3 vagy 4, akkor Bandi tudja, hogy a két kis szám 1 és 2, illetve 1 és 3 (*1 pont*). A 15 négy olyan különböző természetes szám összege, melyek között nem lehet ott együtt az 1 és 2, és nem lehet ott együtt az 1 és 3 sem (*1 pont*). Ha a négy szám között van az 1, akkor a többi szám 3-nál nagyobb. Azonban $1+4+5+6=16>15$, ezért az 1 nincs a négy szám között (*1 pont*).
$2+3+4+5=14$, így a 15 csak egyféleképpen lehet négy 1-nél nagyobb szám összege: $2+3+4+6=15$ (*1 pont*).
Ez valóban megfelel a feladatszövegének, mivel abból, hogy Bandi megtudta, hogy a két kisebb szám összege 5, nem tudja meghatározni őket, mivel lehetnének még az 1 és 4 is.

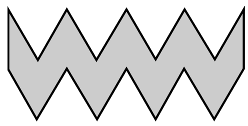
3. **(16 pont)** Az itt látható mindkét alakzatot daraboljátok fel a rácsvonalak mentén két-két, azaz összesen négy azonos alakú és nagyságú részre!" (Elegendő egy-egy megoldást lerajzolnotok!)



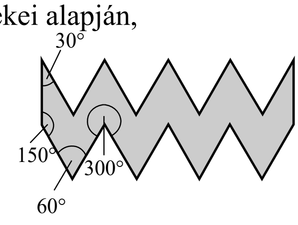
Megoldás: Egyik és másik helyes darabolásra *8-8 pont* adható.



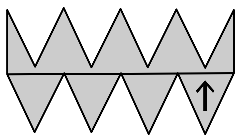
4. **Villámkérdés (3 pont)** Az ábrán látható alakzat minden oldala 10 *cm* hosszú, minden belső szöge $30°$, $60°$, $150°$, vagy $300°$. Mekkora a területe?



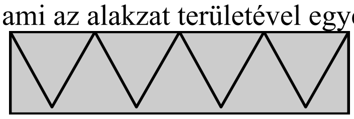
Megoldás: A belső szögek lehetséges értékei alapján,



a lentebbi ábrán látható módon az alakzatba húzott szakasz szabályos háromszögeket zár be az alakzat csúcsaival (*1 pont*).



Az így kapott „alsó” részt a „felsőbe” csúsztatva olyan téglalapot kapunk, amelynek oldalai 10 *cm* és 40 *cm* hosszúak (*1 pont*), így területe 400 cm^2, ami az alakzat területével egyezik (*1 pont*).

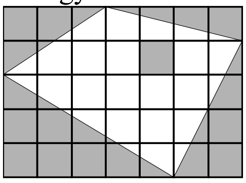


BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2024. NOVEMBER 2.)

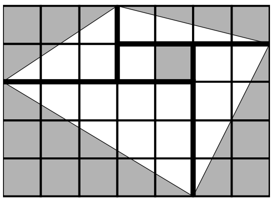
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. **(2 pont)** Az ábrán látható alakzatban a fehér vagy a szürke terület a nagyobb?



Megoldás: Az alábbi feldarabolás (*1 pont*) jól mutatja, hogy a két terület egyforma (*1 pont*).
A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy kiszámoljuk a szürke területet, majd a téglalap területéből kivonjuk, hogy megkapjuk a fehér területet.

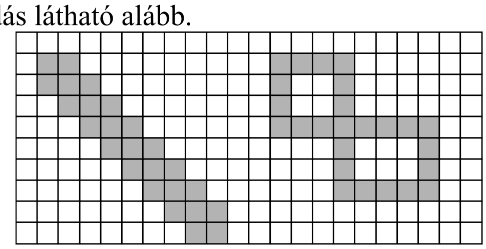


2. **(5 pont)** Egy asztalon 98 pálca van, a hosszuk rendre 1, 2, 3, ..., 98 egység. Andrea és Béla a következő játékot játsszák: felváltva elvesznek egy-egy általuk választott pálcát; a játékot Andrea kezdi. A játéknak akkor van vége, amikor pontosan három pálca marad az asztalon. Ha a megmaradó három pálcából összeállítható egy háromszög, akkor Andrea nyer, különben Béla. Kinek van nyerő stratégiája?

Megoldás: Összesen 98 – 3 = 95 pálcát húznak ketten. Mivel Andrea kezd, így ő húz többször, azaz ő 48 pálcát húzhat (*1 pont*). Az ő célja az, hogy a megmaradt pálcákból összeállítható legyen egy háromszög. Ezt úgy érheti el, hogy a két rövidebb pálca hosszának összege meghaladja a harmadik pálca hosszát (*1 pont*). Tehát, ha 1-től 48-ig kihúzza a pálcákat (amiket megtehet, hiszen 48-szor húz összesen), akkor a két legkisebb: legalább 49 és 50 (*1 pont*), a leghosszabb pálca pedig legfeljebb 98 hosszúságú. Mivel 49 + 50 > 98, így ezzel a stratégiával Andrea nyer (*1 pont*). Az teljesen mindegy, hogy Béla választ-e 1 és 48 közti pálcából, vagy kihúzza a 98 hosszú pálcát, hiszen, ha ezek elfogytak, Andrea szabadon választhat a maradék közül, így is ő nyer (*1 pont*).

3. **(16 pont)** Színezzetek ki 25 mezőt a „négyzetrácsos” papíron úgy, hogy a színezett mezők összefüggőek legyenek, és mindegyik színezettnek páros szomszédja legyen kiszínezve. Rajzoljatok le két eltérő megoldást! (Két színezés különböző, ha eltolással vagy forgatással nem vihetőek egymásba. Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk, és a színezett mezők akkor összefüggőek, ha bármelyikből bármelyikbe el lehet jutni szomszédos színezett mezők mentén.)

Megoldás: Két lehetséges megoldás látható alább.



Helyes megoldásonként *8-8 pont* jár.

4. **Villámkérdés (3 pont)** Egy 3×3-as táblázat mezőibe helyezzétek az 1, 2 és 3 számjegyeket úgy, hogy a sorokban, oszlopokban és átlókban keletkező összegek mind különbözők legyenek! (Minden mezőbe a három közül egyet kell helyezni!)
Megoldás: Nem lehetséges (*1 pont*). Ugyanis összesen 3 + 3 + 2 = 8 különböző összeget kellene kapjunk (*1 pont*), de a legkisebb, ami elérhető 1 + 1 + 1 = 3, a legnagyobb pedig 3 + 3 + 3 = 9, vagyis csak a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 összegek, azaz hétféle összeg érhető el (*1 pont*).